

Flux校正と誤差

観測をして得たデータから天文学に繋げるには、他の観測結果や理論と比較可能な量を求めなければならない。ここで必要となるのが「校正」である。

ここではこの「校正」の一例と、解析や校正の際に重要な誤差の概念を概説する

八木雅文

校正

「計測機器に表示される値と、それに対応する
既知の値(国際標準など)との関係を、
特定の条件下で確認する一連の操作(広辞林)」

・・・なのだが、光赤外のデータ解析での「校正」は
それより広いものも含まれている。
例えば、データ整約・解析の講義で説明された
ダーク補正、フラット補正も校正と呼ばれたりする。
今回は中でもflux(光量)の校正に絞って概説する。
なお、この他、校正には分光観測での波長校正、
また、撮像での位置校正などがある。

較正は必要か？

較正の目的は、観測された量が他の観測や理論と比較できるようにする事である。従って、このような比較が不要な量に関しては、較正は必ずしも必要とは限らない。

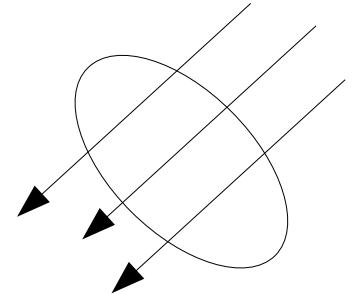
例えば超新星を見つけるのは、時期の異なる2つの画像があれば、その画像の中の天体の等級がわかっていなくても「可能」。

つまりこの時点では較正は必ずしも必要ではない。

一方、その超新星の光度を求めたときにはflux較正が必要となる。

Flux

Flux(正しくはflux 密度)とは、
(ある天体・領域から)観測者の側の
単位面積を、単位時間にどれだけの光が
通過するかという「流量」である。

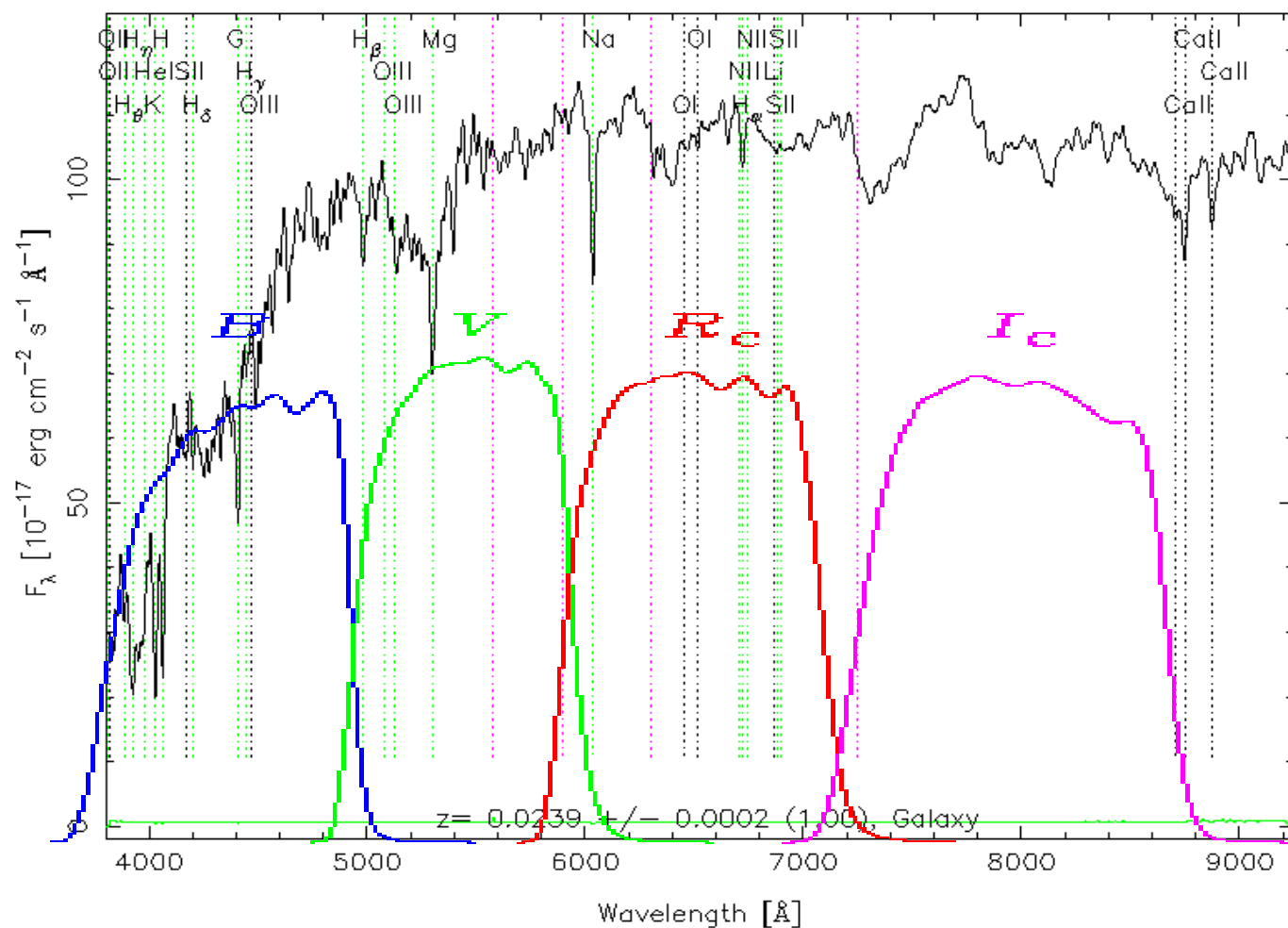


Fluxを測る単位としてエネルギーを用いた
[erg/sec/cm²]という単位が光赤外分野では
用いられ、分光の場合は、これを
単位波長当たりで測った[erg/sec/cm²/Å]や
単位周波数当たりで測った[erg/sec/cm²/Hz]が
用いられる場合が多い。

フィルター

撮像観測の場合、ある波長域の光だけを通す
フィルターを通して観測を行うのが普通である。

RA=194.89878, DEC=27.95927, MJD=53823, Plate=2240, Fiber=585



標準測光システム

フィルターを通して測定したFluxは、そのままでは観測所や観測装置ごとに異なってしまう、互いに比較できない。

そこで、例えばすばる+Suprime-Camのデータを「仮にSDSS のシステムで観測したらどうなるはずか」という値に変換する。

この変換先の標準測光システムとしては可視では Johnson, Kron-Cousins, SDSS, HSTなどがよく使われる。

赤外ではより多種多様なシステムがあり、例えば 2MASS, MKO, CIT, UKIRT などなど。

Fluxと等級

光赤外分野で天体の明るさの指標として用いられる「等級」は、歴史的には人の目で見た明るさを元に決められたものだが、現在はFluxの常用対数を-2.5 倍したものに定数を加えた値が用いられる。加える定数として以下の2種がよく用いられる。

Vega:こと座のVegaのみかけ等級が0等となるように定数を加える(はずだったのだがその後の補正でVegaは+0.03等)

AB:単位周波数当たりのフラックス密度 F_ν から

$$AB = -2.5 \log_{10} F_\nu [erg/cm^2/s/Hz] - 48.6$$

V-band で一致するが赤外で数等異なるので注意

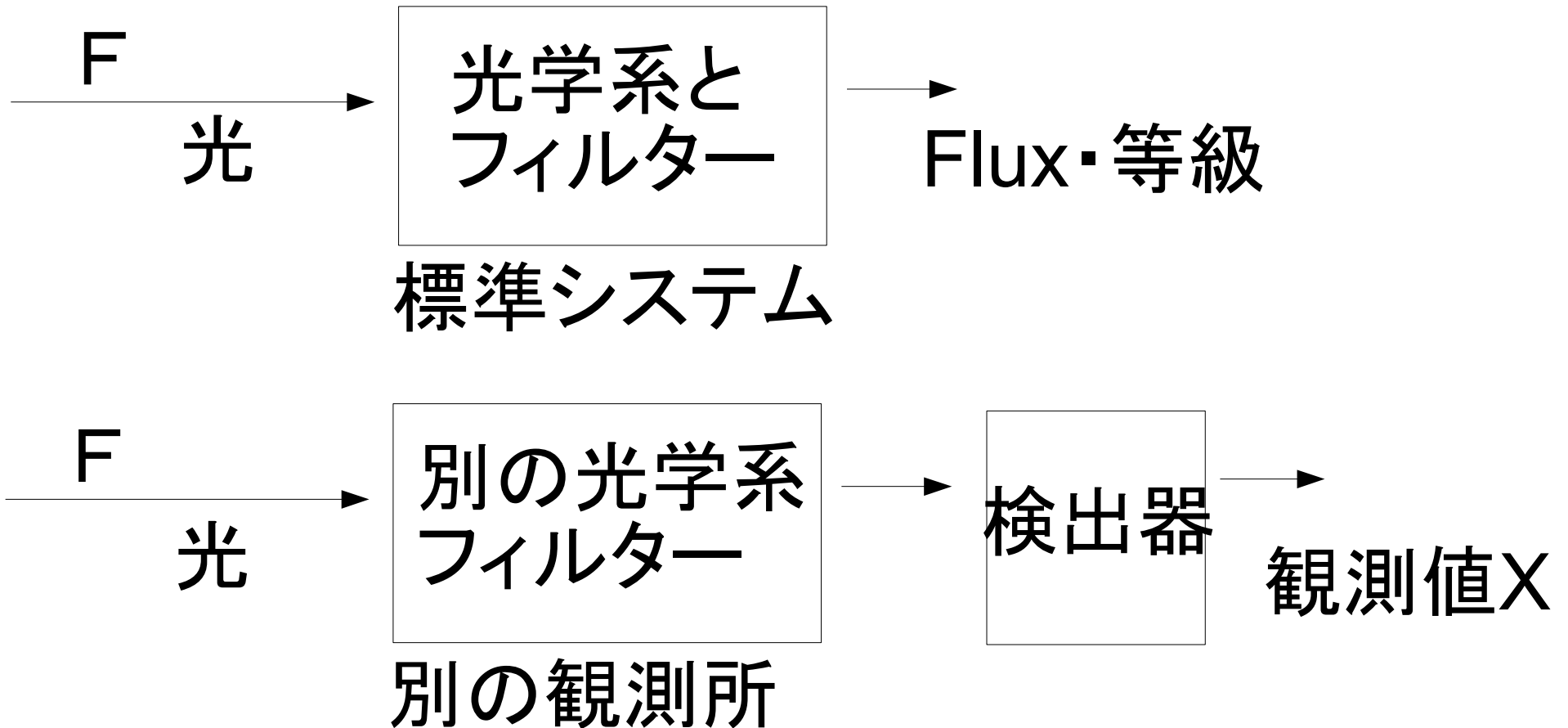
較正の方法

理想的には、フィルターも含めた透過率
(どの波長の光をどれだけの効率で検出するか)
と、検出器がどれだけのfluxを受けたかが分かれば
標準システムへの変換は可能。

しかし、感度特性はフィルターだけでなく
大気状態、望遠鏡、観測装置、などに影響される。
検出器も本当にどれだけのfluxを受けたかは
簡単には測定できない。

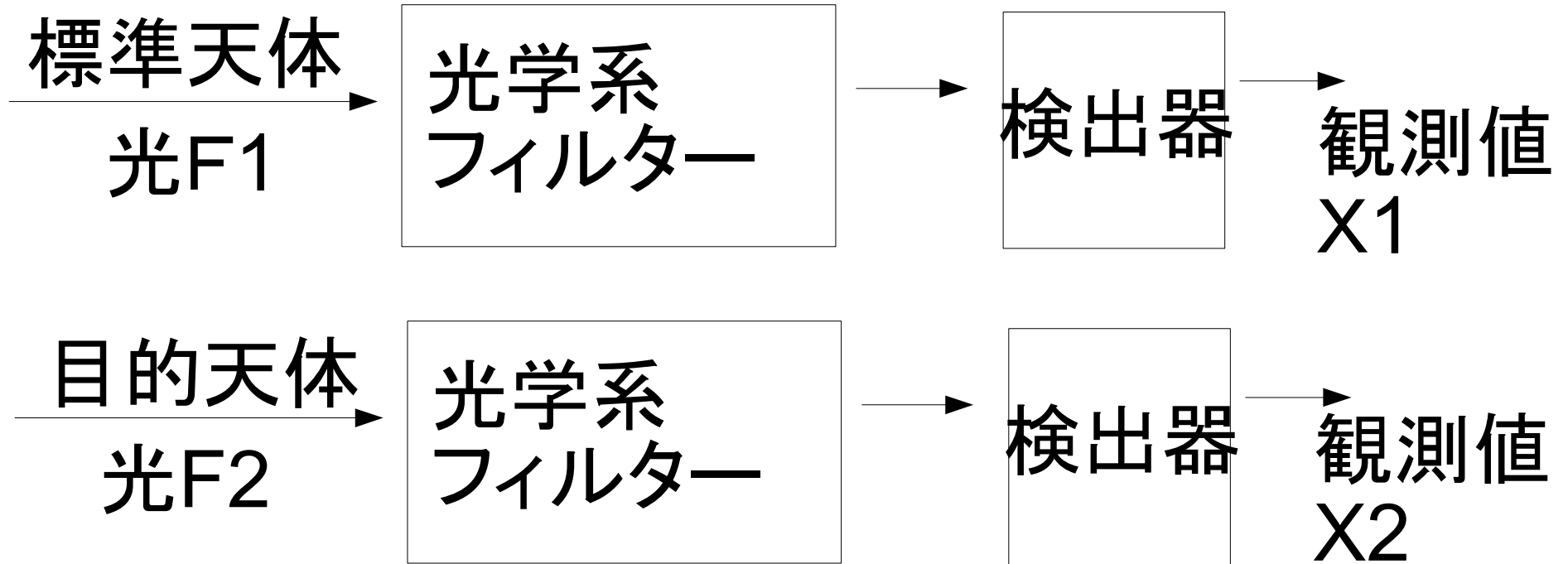
そこで、予め別の方法で標準システムでの
fluxが求められた「測光標準天体」を観測して、
それとの比較で標準システムでのfluxを求めるのが
典型的なflux較正。

測光



観測値から標準システムの
Flux/等級に変換したい

測光



入力(光の強さ)と出力(観測値)の関係、
例えば入力と出力が比例する(線形)、
と分かっているならば、標準天体と目的天体の
観測値から、元の光の相対関係がわかる。
以下線形を仮定する。

しかし

これだけでは標準システムに変換可能ではない。

ズレを生じさせる(主な)要因

- ・大気による吸収・散乱(大気減光)
- ・フィルターの透過特性の違い

これらをそれぞれ考慮して、
必要に応じて補正してやる必要がある。

⇒この補正をどうするかは
観測前に考えた上で、後で必要となるデータを、
観測中に取得しておかなければならない。

大気の影響

大気は光を吸収・散乱で減光し、自分でも光る。
大気が光る分は、空間的な構造を見て
天体のない領域の観測値を用いて補正できる。

吸収・散乱による減光は特に短い波長域で
影響が大きく、また大気の厚みによって変わる。

Flux は厚みの指数で変化するので、

$$F_{obs} = F_0 \exp(-k x)$$

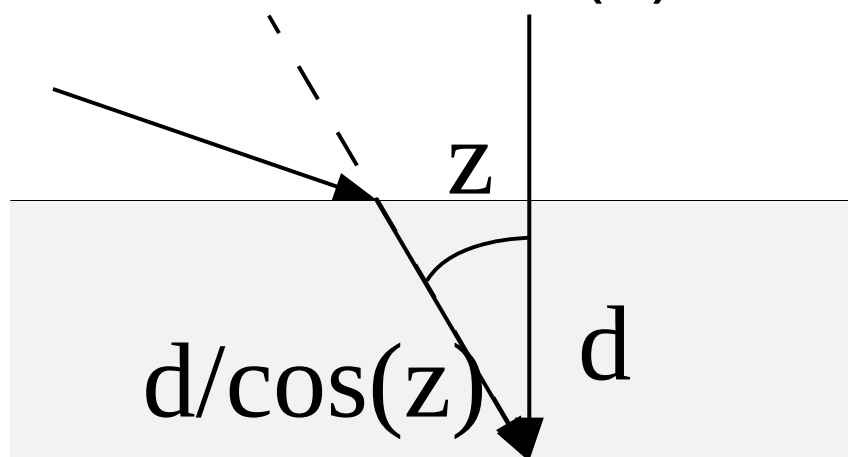
観測値を等級に変換した値(機器等級)は、
大気の厚みに対して線形に変化する。

$$m_{inst} = m_0 + k' x + \Delta m$$

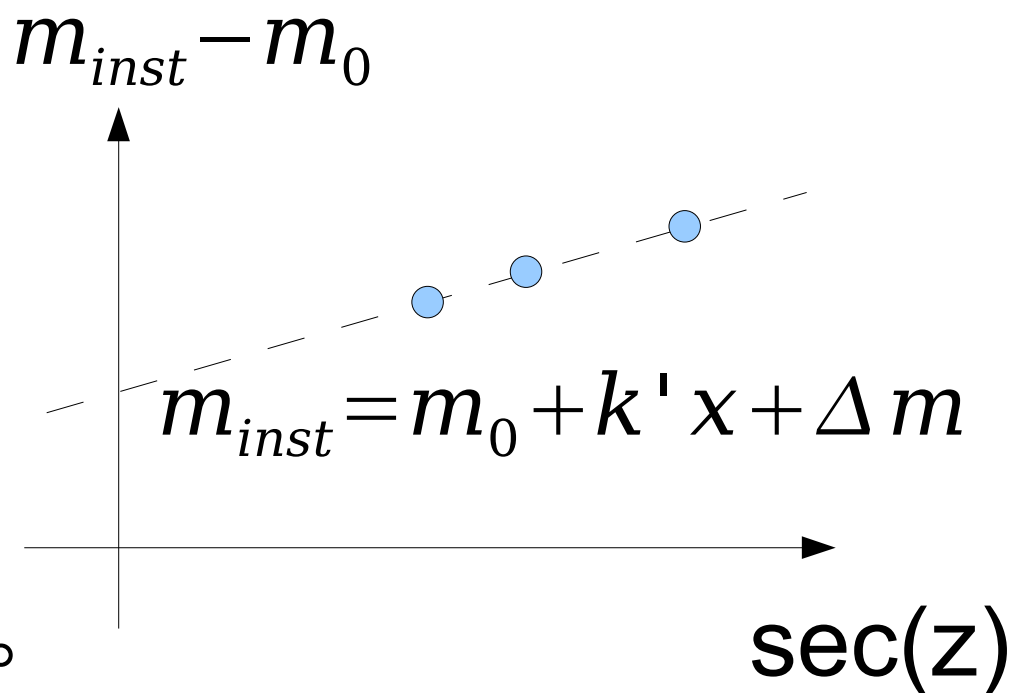
この係数 k' と Δm が知りたい。

大気減光補正

大気の厚みは観測している高度によって変化する。
この厚み(エアマス)は、天頂からの角度を z として
近似的に $1/\cos(z)=\sec(z)$ で表される。

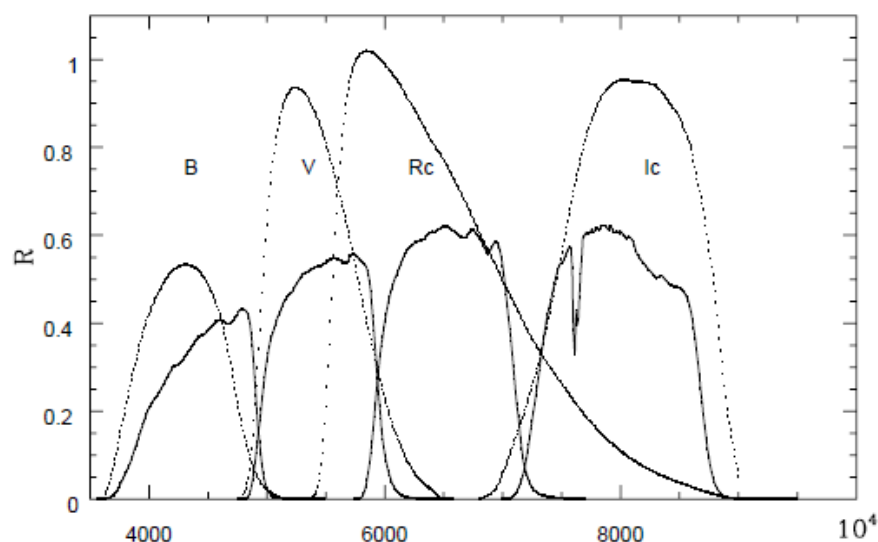


異なった高度で
標準天体を観測すれば
係数 k' , Δm を求められる。

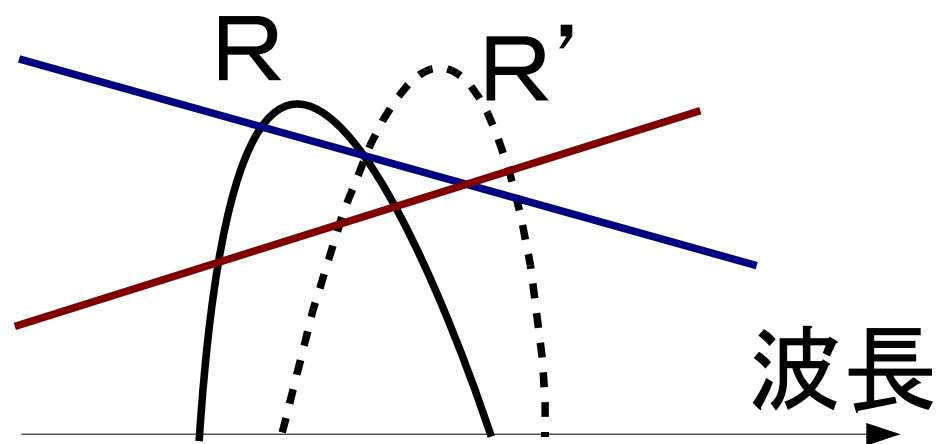


フィルターの違い

異なった波長特性のフィルターで観測したデータはそれだけでは標準システムに変換する事は不可能。



標準システムと
Suprime-Cam
特にRcの違いが
激しい



長波長側に寄ったR'
赤い天体はR'ではRより
fluxが多くなり、
青い天体ではRより
fluxが少なくなる。

色補正

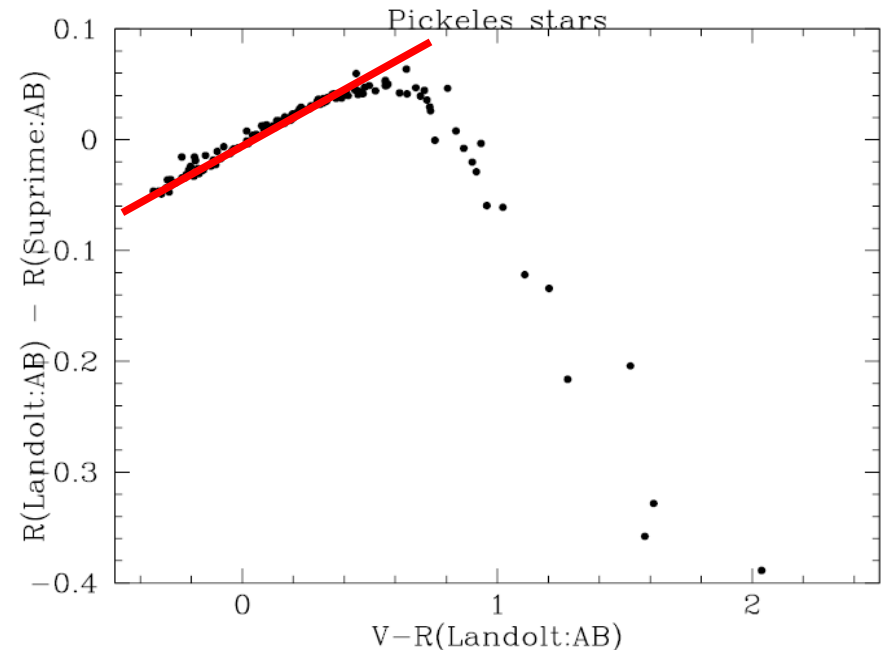
観測しているフィルターの波長域で、
天体のスペクトルが大きく変化しないと仮定すれば、
これを天体の色で補間できる、と仮定できる。
例えばR'を求めるのに (V-R) の色を使って

$$R' = R + b(V - R)$$

として、係数bを観測結果のフィットや
モデル計算から求める事が
よく行われる。

このためには様々な色の
標準天体の観測が必要。

但し、これは近似であり
実際には常に式のように
線形になるとは限らない



まとめ

- 観測結果を他の観測やモデルと比較するために標準測光システムへ変換することが必要で、この作業を較正と呼ぶ。
- Flux 較正は、標準測光システムでFluxや等級が求められている標準天体との比較で行われる
- Flux 較正の際には、特に大気減光の補正と色補正が主要な補正要素である
- 補正を行うには観測時に適切な較正用データを取得しておく必要がある。

誤差

「測定値・理論的推定値また近似計算によって得られた値と、真の値との差(大辞林)」

さて、ここで「真の値」とは何かが問題。
測定値から、どのような値を求めたいと
考えているのか？
それを常に心に留めておく必要あり。

なお、以下の解析ではモデルを考えて、
そのモデルの枠組みで観測を行った場合、
誤差がどうなるかを計算していく。
実際の観測結果からは真の値はわからず、
観測値だけがあるので、厳密な事を言えば
誤差は求められない。

Fluxの真の値？

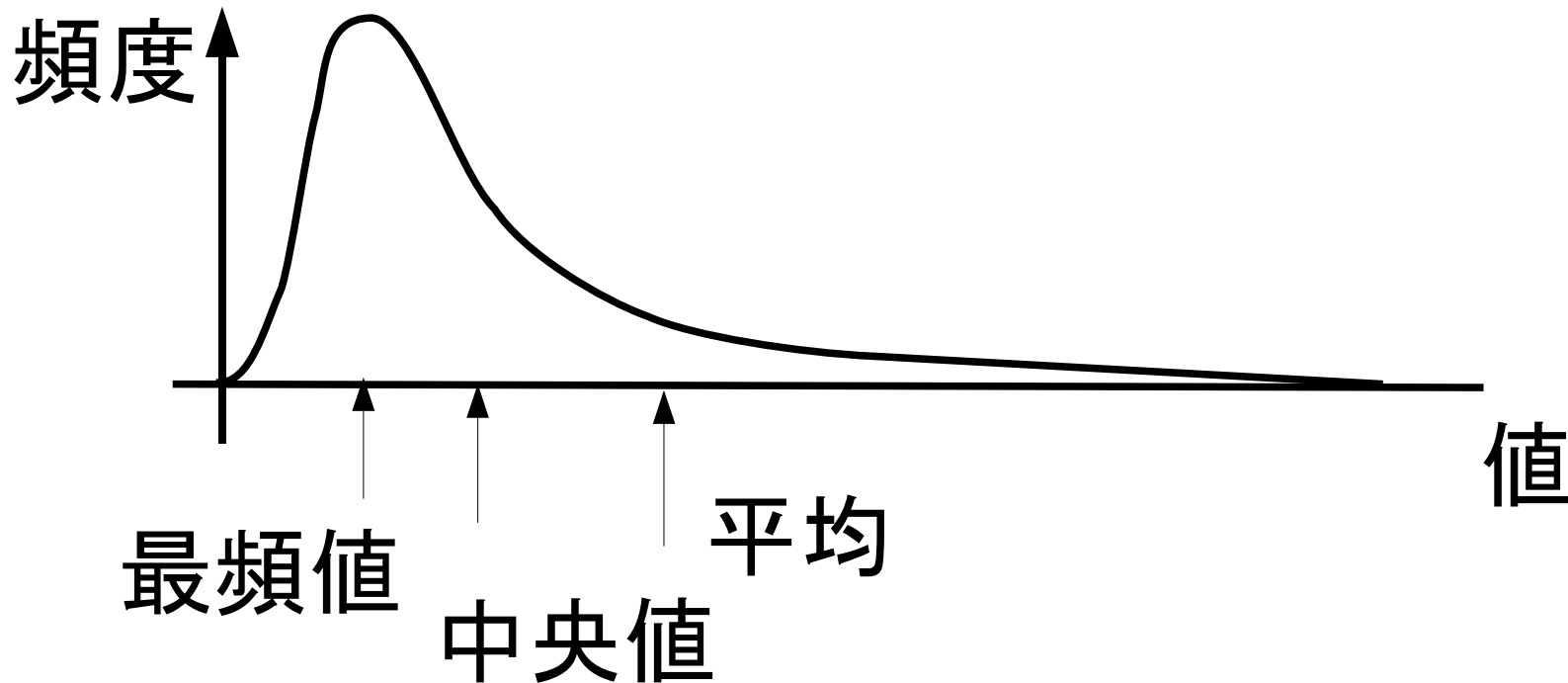
時間変化しないものは、真の値を言うのは簡単。
例えば真空中の光速度。

ところが、光はミクロな確率過程を経て、天体から出てくるため、「ある1秒に天体から出てくる光の量」は別の1秒のそれと同じではない。
つまり観測値は本質的に一定ではない。

その上で、求めたい「真の値」は「長時間平均」。
短時間に観測される光量の「分布」の「代表値」
(これは光を放射する確率と同等の情報)
測光の誤差は、求めた値がどれだけ精度良く
その分布の代表値を表しているかという
指標である。

分布と代表値

分布の代表値として良く使われるのは、平均、中央値（メディアン）、最頻値（モード）など。



光量の場合、理想的にはこの3つは一致する。

系統誤差とランダム誤差

系統誤差：

何回やっても同じ量ずれる誤差

ランダム誤差：

毎回再現性のない誤差

機器の目盛りが間違っていて毎回同じ量ずれる
⇒系統誤差

機器が不安定で結果に再現性がない
⇒ランダム誤差

ある1秒間に受ける光量の平均値からのずれは、
機器の不安定とは別種だが、ランダム誤差の一種

誤差の評価

測定値の「分布」が何らかの方法で予めわかっているならば「誤差の典型値」を計算できる。

良く使われるのが標準偏差（誤差の二乗平均）で、 σ などと書かれる。分布を $p(X)$ 、平均を $E(X)$ として、

$$\sigma = \sqrt{V(X)}$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (X - E(X))^2 p(X) dX$$

- ・観測値の母分布がわかっている場合
⇒ 誤差の分布も推定でき、典型値も求められる。
- ・観測値の母分布の関数形はわかる
あるいは仮定できるが、パラメタが分からない場合
⇒ 母分布のパラメタを推定し、誤差を評価できる

具体例：限界等級

撮像データの測光の限界等級とは、
天体の測光値 (Signal) が、測光誤差 (Noise) の
何倍かという比、S/N が、ある一定値、
例えば、3以上の天体が何等か、
という値である。

例えば28等の天体が S/N=5 の時、
S/N=5 での限界等級が28等、という。

等級のランダム誤差 Δm と、S/N との関係は、

$$\Delta m = \frac{1.086}{S/N}$$

S/Nのモデル計算

S/N を簡単なモデルを仮定して計算してみる。
露出時間を t 、システムの透過率を f 、天体の光度を L とすると、検出器で検出される信号は形式的に

$$S = f \cdot t \cdot L$$

(単位は光電荷数)と書ける。

測光での大きな誤差源は2つ。一つは機器のノイズ。
この「読み出し雑音」は露出時間によらず一定と
考えてよい。あるピクセルでの観測量を X とし、
各観測での読み出し雑音を δX とした場合に、
 δX の標準偏差が r であるとして、この誤差を

$$N_1 = r$$

と書くことにする。単位は電荷数に換算しておく。

S／NのN

もう一つの大きな誤差源は測定される電荷の分布の広がり(ポアソン雑音)。

素子に溜まった総電荷数を n 、
測定する天体のピクセル数を A とすると、
この誤差の典型値(標準偏差)は、

$$N_2 = \sqrt{n} = \sqrt{f \cdot t \cdot (L + A \cdot S_{SKY}) + (t \cdot A \cdot S_{dark})}$$

となる。この N_1, N_2 の合成が誤差 N となる。

なぜ $N_2 = \sqrt{n}$ となるかと言え、この測定される電荷がポアソン統計に従うと考えて良いからだが、今回講義ではここの解説は省略。

後ろのほうに解説は付けときます。

誤差の伝播

このように2種以上の誤差源があった場合、その合成に用いられるのが

「誤差の伝播の式」

一般的には分散(標準偏差)が演算によってどのように変わるかをまとめたもの。

確率変数、 X , Y と関数 $f(X, Y)$ を考え、

1) 確率変数 X の誤差 δX を考える。 δY も同様。

2) 期待値、 $E(f(X, Y))$ を求める。

3) 分散 $V(f(X, Y)) = E((f(X, Y) - E(f(X, Y)))^2)$

つまり観測値から期待値を引いた

二乗平均を求め、この平方根を誤差とする。

この方針で「変数の和の誤差」を求めてみる。

$f(X, Y) = X + Y$ の場合。

誤差の伝播の例

X, Y の平均を μ_X, μ_Y と書き、標準偏差を σ_X, σ_Y とする。

この時、 $E(X+Y)=\mu_X+\mu_Y$ なので、

$$\begin{aligned} V(X+Y) &= E(((X+Y)-(\mu_X+\mu_Y))^2) \\ &= E(((X-\mu_X)+(Y-\mu_Y))^2) \\ &= E((X-\mu_X)^2) + 2E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) \\ &\quad + E((Y-\mu_Y)^2) \\ &= \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2E((X-\mu_X)(Y-\mu_Y)) \end{aligned}$$

と求める事ができる。

共分散

ここで出てきた $E((X - \mu_X)(Y - \mu_Y))$
を共分散と呼んで $Cov(X, Y)$ と書く。
共分散が0の時、X、Yは独立という。

これが0でないのは、例えばXが大きい時は
Yも大きい、あるいはXが大きい時は
Yが小さいなど、何らかの相関がある場合。
(ちなみに2変数の相関係数はこの共分散を
2変数の標準偏差の積で割った値である)

誤差の伝播において、変数が独立かどうかは
極めて重要。しかし、実際のデータでは
独立かどうか判断するのは簡単とは限らない。
誤差源に対する吟味が必要。

測光のS/N

$$V(X+Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2 + 2\text{Cov}(X, Y)$$

測光誤差の場合、各ピクセルの読み出し雑音とポアソン雑音は全て独立だと考えられるので、ピクセル数をAとおくと

$$N^2 = A N_1^2 + N_2^2$$

$$N = \sqrt{A r^2 + f \cdot t \cdot (L + A \cdot s_{SKY}) + (t \cdot A \cdot s_{dark})}$$

$$\frac{S}{N} = \frac{f \cdot t \cdot L}{\sqrt{A r^2 + t \cdot (f \cdot (L + A \cdot s_{SKY}) + A \cdot s_{dark})}}$$

測光の S/N

$$\frac{S}{N} = \frac{f \cdot t \cdot L}{\sqrt{A r^2 + t \cdot (f \cdot (L + A \cdot s_{SKY}) + A \cdot s_{dark})}}$$

$$t \ll \frac{r^2}{f \cdot (L + A \cdot s_{SKY}) + A \cdot s_{dark}} \quad \frac{S}{N} \sim \frac{f \cdot L}{r \sqrt{A}} \cdot t$$

$$t \gg \frac{r^2}{f \cdot (L + A \cdot s_{SKY}) + A \cdot s_{dark}}$$

$$\frac{S}{N} \sim \frac{f \cdot L}{\sqrt{f \cdot L + A \cdot (f \cdot s_{SKY} + s_{dark})}} \cdot \sqrt{t}$$

露出時間とS/N

露出時間が短い場合は読み出し雑音が効き、

$$\frac{S}{N} \sim \left(\frac{f \cdot L}{r} \right) \cdot t$$

と露出時間に比例してS/Nが上がる。

一方、露出時間が長くなると、ポアソン雑音が効き、

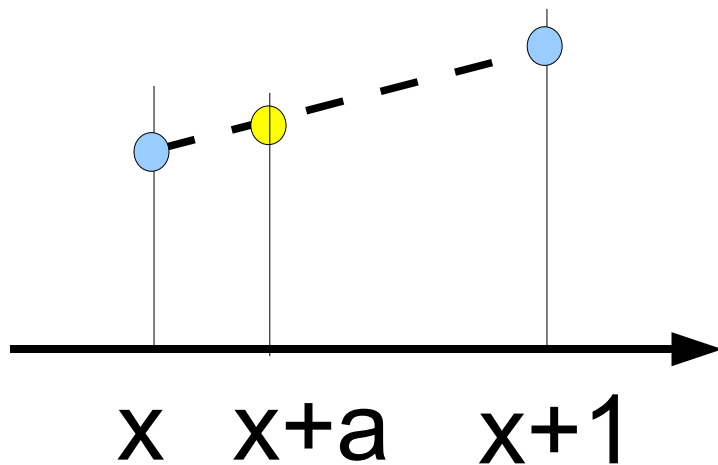
$$\frac{S}{N} \sim \left(\frac{f \cdot L}{\sqrt{f \cdot L + A \cdot (f \cdot S_{SKY} + S_{dark})}} \right) \cdot \sqrt{t}$$

と、露出時間の平方根に比例してしか
S/N が上がらない。

画像の並行移動

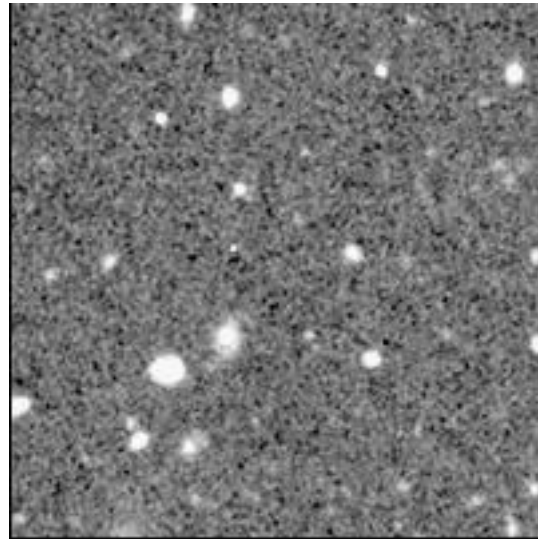
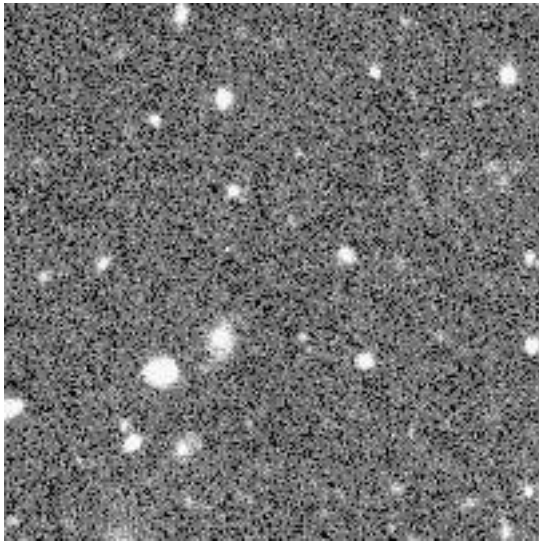
回転でも類似の問題があるのだが、ここでは並行移動を考える。画像・データを非整数ピクセルだけ並行移動させたい。例えば位置を合わせて足し合わせる場合など。方法として、線形補間のリサンプリングを考える。例えばx軸方向に $-a$ ($0 < a < 1$) シフトさせるときは

$$v'(x') = (1 - a)v(x) + av(x + 1)$$



実際にシフトさせてみた

左がシフト前、右は $x+0.5, y+0.5$ シフト



見た目でもざらつきが減っているのだが、
実際測るとピクセルあたりのノイズは
確かに減っている。左67ADU, 右43ADU

すると並行移動でS/Nが上げられる！？

誤差の計算

元画像での各点での標準偏差を σ とする。
X方向の移動だけ考えて

$$v'(x') = (1-a)v(x) + av(x+1)$$

とする。もし元画像で各点の誤差が独立であれば、
並行移動後の各点での分散は

$$V((1-a)v(x) + av(x+1)) = (1-a)^2\sigma^2 + a^2\sigma^2$$

この分散は $a=0.5$ の時 $0.5\sigma^2$ と確かに元画像の
 σ^2 よりも小さい。

しかし、並行移動操作の結果、隣り合った点の値は
既に独立ではなくなっているため、
広い範囲で見た場合のS/Nは増えない。

誤差の計算

具体的に $[0, N-1]$ の範囲の総和の誤差を計算してみる。

元の誤差は独立な N 点の値の和なので分散は

$$\begin{aligned} V(v(0) + \dots + v(N-1)) &= V(v(0)) + \dots + V(v(N-1)) \\ &= N \sigma^2 \end{aligned}$$

次に、並行移動後の各点の値は

$$v'(0) = (1-a)v(0) + a v(1)$$

$$v'(1) = (1-a)v(1) + a v(2)$$

...

$$v'(N-1) = (1-a)v(N-1) + a v(N)$$

$$v'(0), v'(1) \text{ の共分散は } a(1-a)\sigma^2$$

誤差の計算

最初の2点の共分散を計算すると

$$\begin{aligned} & Cov(v'(0), v'(1)) \\ &= Cov((1-a)v(0) + av(1), (1-a)v(1) + av(2)) \\ &= (1-a)^2 Cov(v(0), v(1)) + a^2 Cov(v'(1), v(2)) \\ &\quad + a(1-a)Cov(v(1), v(1)) \\ &\quad + a(1-a)Cov(v(0), v(2)) \\ &= a(1-a)\sigma^2 \end{aligned}$$

この結果、 $a=0.5$ の時、独立だったら σ^2 の誤差が

$$\begin{aligned} V(v'(0) + v'(1)) &= 2((1-a)^2\sigma^2 + a^2\sigma^2) + 2a(1-a)\sigma^2 \\ &= 2(1-a(1-a))\sigma^2 = 1.5\sigma^2 \end{aligned}$$

誤差の計算

更に幅を広げて計算できるが、
実際のところ v に戻して

$$\begin{aligned} &v'(0) + \dots v'(N-1) \\ &= (1-a)v(0) + v(1) + \dots v(N-1) + av(N) \end{aligned}$$

なので、この分散は

$$\begin{aligned} V &= ((1-a)^2 + (N-1) + a^2) \sigma^2 \\ &= (N - 2a(1-a)) \sigma^2 \end{aligned}$$

と、 N が大きくなると効果が全くない事がわかる。

この意味で、並行移動で画像が綺麗になっても
限界等級は上がらないのである。

補足：二項分布

ある確率 p で事象が起きる試行を N 回行ったとき、 X 回事象が起きる確率分布を二項分布と呼ぶ。書き方には色々流儀があるがここでは $B(N, p)$ と書くことにする。これは X の関数である。

$$B(N, p)(X) = {}_N C_X p^X (1-p)^{N-X}$$
$${}_N C_X = \frac{N!}{X!(N-X)!}$$

例えば $N=5$, $p=1/6$ の時、(6面サイコロを5個振った時に1の目の出る数の確率分布)は $B(5, 1/6)$ と書ける。

この分布の平均は Np , 分散は $Np(1-p)$

二項分布

$$B(N, p)(X) = {}_N C_X p^X (1-p)^{N-X}$$

数字を入れて計算してみると、

$$B\left(5, \frac{1}{6}\right)(0) = \left(1 - \frac{1}{6}\right)^5 \sim 0.402$$

$$B\left(5, \frac{1}{6}\right)(2) = {}_5 C_2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right)^{5-2} \sim 0.093$$

6面サイコロを5個振ったとき、1の目が1つも出ない確率は 40.2%、丁度2つ出る確率は9.3%。

二項分布の平均

分布の平均を求めるために、
モーメント母関数と呼ばれる関数を考える。

$$\phi(t) = E(e^{tX}) = \sum_{X=0}^N e^{tX} \cdot {}_N C_X p^X (1-p)^{N-X}$$

これをtで1階微分して、t=0 を代入すると、
分布の平均が出る。

$$\phi'(t) = \sum_{X=0}^N X e^{tX} \cdot {}_N C_X p^X (1-p)^{N-X}$$

$$\begin{aligned} \phi'(0) &= \sum_{X=0}^N X \cdot {}_N C_X p^X (1-p)^{N-X} \\ &= \sum_{X=0}^N X \cdot B(N, p)(X) = E(X) \end{aligned}$$

二項分布の平均

一方、元の関数形を変形してから微分、代入して

$$\begin{aligned}\phi(t) &= \sum_{X=0}^N {}_N C_X (p e^t)^X (1-p)^{N-X} \\ &= (p e^t + (1-p))^N\end{aligned}$$

$$\phi'(t) = N p e^t (p e^t + (1-p))^{N-1}$$

$$\phi'(0) = N p$$

従って

$$E(X) = \sum_{X=0}^N X \cdot {}_N C_X p^X (1-p)^{N-X} = N p$$

二項分布の平均は試行回数と確率の積。

二項分布の分散

さて次は分散だが、定義は以下。

$$V(X) = \sum_{X=0}^N (X - Np)^2 \cdot {}_N C_X p^X (1-p)^{N-X}$$

平均同様にモーメント母関数を考え2階微分。

$$\phi''(t) = \sum_{X=0}^N X^2 e^{tX} \cdot {}_N C_X p^X (1-p)^{N-X}$$

別途、展開後の形も2階微分すれば、

$$\phi'(t) = Np e^t (p e^t + (1-p))^{N-1}$$

$$\begin{aligned} \phi''(t) &= Np e^t (p e^t + (1-p))^{N-1} \\ &\quad + N(N-1)p^2 e^{2t} (p e^t + (1-p))^{N-2} \end{aligned}$$

二項分布の分散

$$\phi''(0) = Np + N^2 p^2 - N p^2$$

$$\begin{aligned} V(X) &= \sum_{X=0}^N (X^2 - 2NpX + (Np)^2) \cdot {}_N C_X p^X (1-p)^{N-X} \\ &= \phi''(0) - 2Np\phi'(0) + (Np)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(X) &= (Np + N^2 p^2 - Np^2) - 2(Np)(Np) + (Np)^2 \\ &= Np(1-p) \end{aligned}$$

が導かれる。なお、これは0中心で展開したが、
Np中心の母関数 $E(e^{t(X-Np)})$
を改めて考えたほうが、計算は素直。

ポアソン分布

二項分布で Np を一定のまま $p \rightarrow 0$ $N \rightarrow \infty$ に持っていった極限がポアソン分布。

$k = Np$ と置いて、 $p(k)$ は以下になる。証明略。

$$p(k)(x) = \frac{k^x e^{-k}}{x!}$$

平均 $E(X) = k$
分散 $V(X) = k$

これが、電荷数のポアソン誤差が、電荷数の平方根になるという根拠。

ポアソン分布に従う X 、 Y という2つの変数があったとき、和 $X + Y$ もポアソン分布に従うという性質がある。

ポアソンの和

可視や近赤外の場合、天体から出てくる光はポアソン分布に従い、空からの光もポアソン分布に従っていると考え、またダーク電流もポアソン分布に従っていると考える(ことにする)
この結果この独立な3つの量を足した「電荷数」もポアソン分布に従うと考えて良い

一方、ポアソン分布の定数倍はポアソン分布にならない。電荷数はポアソン分布に従うが、FITSになって出てきた値は一般に定数倍されていて、ポアソン分布に従わない。

これが前の方で式を電荷数で書いた理由。